

CONCURSUL NAȚIONAL "PEDAGOGIA MATEMATICII"
ETAPA JUDEȚEANĂ, 08.03.2025
CLASA a 10-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 15 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

Problema 1 (autor Raluca Daniela Stoican)

a) Raționalizați numitorul fracției $\frac{4}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}$.

b) Pentru $x = \left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{103}+1}$, calculați valoarea expresiei

$$P(x) = x^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}} \cdot x^{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} \cdot x^{\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}} \dots \dots \cdot x^{\frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}}}.$$

c) Dacă $a=1, b=2$ calculați valoarea expresiei

$$E(a,b) = \left(a^{\frac{5}{2}} - ab^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}b - b^{\frac{5}{2}}\right) : \left[\left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}\right)\left(b^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{3}{4}}\right)\right].$$

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{4}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{5}+1} &= \frac{4}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{5}-1)} = \frac{4}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}-1)} = \dots\dots\dots 2\text{p} \\ &= \frac{4(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}+1)}{4} = (\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}+1) \dots\dots\dots 3\text{p} \end{aligned}$$

b)

$$P(x) = x^{\frac{1}{1+\sqrt{2}}} \cdot x^{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} \cdot x^{\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}} \dots \dots \cdot x^{\frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}}} = x^{\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}}}$$

.....1p

$$\text{Atunci } P(x) = x^{\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\dots+\sqrt{102}-\sqrt{103}}{-1}} = x^{\sqrt{103}-1} \dots\dots\dots 2\text{p}$$

$$\text{Cum } x = \left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{103}+1} = \left(2^{\frac{1}{6}}\right)^{\sqrt{103}+1} = 2^{\frac{\sqrt{103}+1}{6}} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\Rightarrow P(x) = x^{\sqrt{103}-1} = \left(2^{\frac{\sqrt{103}+1}{6}}\right)^{\sqrt{103}-1} = 2^{\frac{103-1}{6}} = 2^{17} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$c) E(a, b) = \left(a^{\frac{5}{2}} - ab^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}b - b^{\frac{5}{2}} \right) : \left[\left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} \right) \left(b^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{3}{4}} \right) \right] = (a^2\sqrt{a} - ab\sqrt{b} + ab\sqrt{a} - b^2\sqrt{b}) : (b\sqrt{b} - a\sqrt{a})$$

.....2p

$$E(a, b) = (a + b)(a\sqrt{a} - b\sqrt{b}) : (b\sqrt{b} - a\sqrt{a}), \text{ deci } E(a, b) = -(a + b) \text{2p}$$

$$\Rightarrow E(1, 2) = -3 \text{1p}$$

Problema 2 (autor Alina Paraschiv)

Arătați că expresia

$$A = \left(\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{2024} \cdot \log_x 2^{2025}} \right) - \frac{2024}{2025(\log_x 2)^2}$$

nu depinde de x .

Soluție:

$$A = \left(\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{2024} \cdot \log_x 2^{2025}} \right) - \frac{2024}{2025(\log_x 2)^2}$$

$$A = \log_2 x \cdot \log_4 x + \log_4 x \cdot \log_8 x + \dots + \log_{2^{2024}} x \cdot \log_{2^{2025}} x - \frac{2024}{2025(\log_x 2)^2} \text{4p}$$

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} (\log_2 x)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} (\log_2 x)^2 + \dots + \frac{1}{2024 \cdot 2025} (\log_2 x)^2 - \frac{2024}{2025(\log_x 2)^2} \text{4p}$$

$$A = (\log_x 2)^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025} \right) - \frac{2024}{2025(\log_x 2)^2} \text{4p}$$

$$A = \frac{1}{(\log_x 2)^2} \left(1 - \frac{1}{2025} - \frac{2024}{2025} \right) = 0 \text{3p}$$

Problema 3 (autor Ana Maria Ioniță)

Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 [3x^2 + (m+5)x + m+5]$, $m \in \mathbb{R}$. Pentru ce valori reale ale lui m funcția are domeniul de definiție $D = \mathbb{R}$?

Soluție:

$$3x^2 + (m+5)x + m+5 > 0, \text{ pentru orice } m \in \mathbb{R} \text{4p}$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}, \text{ deci } m^2 - 2m - 35 < 0 \text{6p}$$

$$\Delta_m = 144, m = 7 \text{ sau } m = -5 \text{3p}$$

$$m^2 - 2m - 35 < 0 \text{ pentru } m \in (-5, 7) \text{2p}$$

Problema 4

Să se determine numărul real m știind că ecuațiile exponențiale $2^{x+1} - m \cdot 4^x + 3 = 0$ și $3^{x+1} + 9^x - 18 = 0$ au o soluție comună.



Soluție:

$$3^x \cdot 3 + 3^{2x} - 18 = 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$3^x = t > 0, \text{ astfel vom avea } t^2 + 3t - 18 = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$t = 3, \text{ care convine, sau } t = -6, \text{ care nu convine} \dots\dots\dots 5p$$

$$\text{Ecuațiile au o soluție comună, deci soluția poate fi doar } x = 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$2^2 - 4m + 3 = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$m = \frac{7}{4} \dots\dots\dots 1p$$